УДК 517.984

Об осцилляционных свойствах собственных функций задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами

А. А. Владимиров

Аннотация. В статье рассматривается сингулярная спектральная задача Штурма–Лиувилля

$$-(py')' + (q - \lambda r)y = 0,$$
$$(U-1)y^\vee + i(U+1)y^\wedge = 0,$$

где функция $p \in L_\infty[0,1]$ равномерно положительна, функции q, $r \in W_2^{-1}[0,1]$ вещественны, а определяющая граничные условия унитарная комплексная матрица U размера 2×2 диагональна. Показывается, что основные известные для гладкого случая результаты о числе и расположении нулей собственных функций остаются справедливыми и в общей ситуации.

§ 1. Введение

1. Пусть p — равномерно положительная функция класса $L_\infty[0,1]$, q и r — две вещественные функции класса $W_2^{-1}[0,1]$, а U — диагональная унитарная комплексная матрица размера 2×2. Основным объектом рассмотрения в настоящей статье будет являться граничная задача

$$-(py')' + (q - \lambda r)y = 0, \tag{1}$$

$$(U-1)y^\vee + i(U+1)y^\wedge = 0, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, а векторы $y^\wedge$ и $y^\vee$ определены в виде

$$y^\wedge = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix}, \qquad\qquad y^\vee = \begin{pmatrix} y^{[1]}(0) \\ -y^{[1]}(1) \end{pmatrix}$$

(ср. [**САДО**, Теорема 7.5]).

Ввиду негладкости коэффициентов дифференциального выражения из левой части уравнения (1), постановка задачи (1), (2) нуждается в уточнении. Мы будем проводить его на основе аппроксимативного подхода, рассмотренного в работах [**ШЛПР**], [**СПДО**].

Обозначим через $\mathfrak{H}_U$ гильбертового пространство

$$\{y \in W_2^1[0,1] \mid y^\wedge \in \operatorname{im}(U-1)\},$$

норма которого имеет обычный вид

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_U) \qquad \|y\|^2_{\mathfrak{H}_U} = \int_0^1 \left\{|y'|^2 + |y|^2\right\} dx.$$

Рассмотрим оператор вложения $I : \mathfrak{H}_U \to L_2[0,1]$ и обозначим через $\mathfrak{H}'_U$ пополнение пространства $L_2[0,1]$ по норме $\|y\|_{\mathfrak{H}'_U} \rightleftharpoons \|I^*y\|_{\mathfrak{H}_U}$. Непосредственно из этого определения вытекает возможность непрерывного продолжения оператора I^* до изометрии $I^+ : \mathfrak{H}'_U \to \mathfrak{H}_U$. Граничную задачу (1), (2) мы будем теперь понимать как задачу о спектре линейного операторного пучка $T : \mathfrak{H}_U \to \mathfrak{H}'_U$, имеющего вид

$$(\forall \lambda \in \mathbb{C})\ (\forall y \in \mathfrak{H}_U) \qquad \langle I^+T(\lambda)y, y\rangle_{\mathfrak{H}_U} = \int_0^1 p\,|y'|^2\,dx + \int_0^1 (q-\lambda r)\cdot |y|^2\,dx + \langle Vy^\wedge, y^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2},$$

Работа поддержана РФФИ, код проекта 07-01-00283, и фондом INTAS, код проекта 05-1000008-7883.

где V — диагональная эрмитова матрица размера 2×2 с элементами

$$(\forall k \in \{1, 2\}) \qquad V_{kk} = \begin{cases} -\operatorname{ctg} \dfrac{\arg U_{kk}}{2}, & U_{kk} \neq 1, \\ 0, & U_{kk} = 1. \end{cases}$$

2. Основной целью настоящей статьи является исследование вопроса о числе и расположении нулей собственных функций граничной задачи 1 (1), 1 (2) в случае, когда оператор $I^+T(\xi)$ положителен при некотором значении $\xi \in \mathbb{R}$. Если коэффициенты p, q и r являются достаточно гладкими, этот вопрос хорошо изучен (дефинитный подслучай $r \gg 0$ является классическим; индефинитный подслучай рассматривался, в частности, в работе [**IOT**]). Как будет показано далее, основные результаты, известные для гладкого случая, остаются справедливыми и в общей ситуации.

Отметим, что частный случай рассматриваемой нами задачи, выделяемый условиями $p \in BV[0, 1]$, $q \geqslant 0$, $r > 0$ и $U = 1$, был другими методами исследован в недавней работе [**HPOT**].

3. Как обычно, под *индексом инерции* $\operatorname{ind} \mathfrak{m}$ определённой на некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ квадратичной формы $\mathfrak{m}$ мы будем понимать точную верхнюю грань размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию

$$(\exists c > 0)\ (\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \mathfrak{m}[y] \leqslant -c\,\|y\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

Соответственно, под индексом инерции действующего в пространстве $\mathfrak{H}$ эрмитова оператора E мы будем понимать индекс инерции его квадратичной формы $\langle E\cdot, \cdot\rangle_{\mathfrak{H}}$.

4. Структура оставшейся части статьи такова. В параграфе § 2 нами устанавливаются вспомогательные результаты о свойствах сопряжённых точек операторов Штурма–Лиувилля. В параграфе § 3 изучаются непосредственно осцилляционные свойства собственных функций задачи 1 (1), 1 (2).

При ссылках на разделы статьи, не принадлежащие параграфу, внутри которого даётся ссылка, дополнительно указывается номер параграфа. При ссылках на формулы, не принадлежащие пункту, внутри которого даётся ссылка, дополнительно указывается номер пункта.

§ 2. Сопряжённые точки операторов Штурма–Лиувилля

1. Далее мы будем использовать стандартную вариационную технику осцилляционной теории, изложенную, например, в [**САДО**, Глава 4]. Укажем на общий факт, лежащий в основе возможности применения этой техники к интересующему нас случаю.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторое гильбертово пространство. Обозначим через $\mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ пространство ограниченных эрмитовых операторов на $\mathfrak{H}$, снабжённое сильной операторной топологией. Обозначим также через $\mathfrak{E}_c(\mathfrak{H})$ пространство вполне непрерывных эрмитовых операторов на $\mathfrak{H}$, снабжённое равномерной операторной топологией. Справедливо следующее утверждение:

1.1. *Пусть $\mathfrak{I}$ — топологическое пространство, а $A : \mathfrak{I} \to \mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ и $B : \mathfrak{I} \to \mathfrak{E}_c(\mathfrak{H})$ — непрерывные отображения. Пусть при этом операторы $A(x)$ равномерно по $x \in \mathfrak{I}$ положительны. Тогда для любого натурального числа $n \geqslant 1$ функция $\Lambda_n : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$, ставящая каждой точке $x \in \mathfrak{I}$ в соответствие n-ю снизу (с учётом кратности) точку спектра оператора $1 + [A(x)]^{-1/2}B(x)[A(x)]^{-1/2}$, является непрерывной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при сделанных предположениях операторы $[A(x)]^{-1} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ непрерывно зависят от параметра и равномерно по $x \in \mathfrak{I}$ ограничены. Тогда при любом $m \in \mathbb{N}$ операторы $[A(x)]^{-m} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ также непрерывно зависят от параметра. Кроме того, операторы $[A(x)]^{-1/2}$ могут быть с любой наперёд заданной точностью равномерно по $x \in \mathfrak{I}$ приближены по норме значениями фиксированного многочлена от операторов $[A(x)]^{-1}$

(см. [**ЛФА**, п. 106]). Поэтому операторы $[A(x)]^{-1/2} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ также непрерывно зависят от параметра.

Из непрерывности зависимости операторов $[A(x)]^{-1/2} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ от параметра и равномерной по $x \in \mathfrak{I}$ ограниченности этих операторов следует непрерывность зависимости от параметра операторов $[A(x)]^{-1/2}B(x)[A(x)]^{-1/2} \in \mathfrak{E}_c(\mathfrak{H})$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из известных оценок для собственных значений вполне непрерывных эрмитовых операторов (см. [**ЛФА**, п. 95]). $\square$

2. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{H}_U^0 \subseteq \mathfrak{H}_U$, имеющее вид

$$\{y \in \mathfrak{H}_U \mid y(1) = 0\}.$$

С этим подпространством мы будем связывать параметризованное значениями $x \in (0,1]$ семейство вложений $J_x : \mathfrak{H}_U^0 \to \mathfrak{H}_U$, имеющих вид

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_U^0)\ (\forall t \in [0,1]) \qquad [J_x y](t) = \begin{cases} y(t/x), & t \leqslant x, \\ 0, & t \geqslant x. \end{cases}$$

Каждому оператору $K : \mathfrak{H}_U \to \mathfrak{H}_U'$, для которого оператор I^+K является эрмитовым, может быть сопоставлена оператор-функция $S_K : (0,1] \to \mathfrak{E}(\mathfrak{H}_U^0)$, определённая условием

$$(\forall x \in (0,1]) \qquad S_K(x) = {J_x}^* I^+ K J_x.$$

Точки $x \in (0,1]$, для которых подпространства $\ker S_K(x)$ являются нетривиальными, мы будем называть *сопряжёнными точке* 0 *относительно оператора* K. Размерность подпространства $\ker S_K(x)$ мы будем при этом называть *кратностью* сопряжённой точки x.

3. Заметим (см. [**ШЛППР**], [**СПДО**]), что при произвольно фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$ существуют функция $\omega \in L_2[0,1]$ и число $\omega_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$(\forall y \in W_2^1[0,1]) \qquad \int_0^1 (q - \lambda r) \cdot \overline{y}\, dx = -\int_0^1 \omega \cdot \overline{y'}\, dx + \omega_1 \cdot \overline{y(1)}.$$

При этом (см. там же) для любой функции $y \in \mathfrak{H}_U$ выполнение равенства $T(\lambda)y = 0$ равносильно существованию вектор-функции $Y \in W_2^1[0,1] \times W_1^1[0,1]$, удовлетворяющей тождеству

$$(\forall t \in [0,1]) \qquad Y_1(t) = y(t)$$

и являющейся решением граничной задачи

$$\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \omega/p & 1/p \\ -\omega^2/p & -\omega/p \end{pmatrix} \cdot Y, \tag{1}$$

$$(U_{11} - 1) \cdot Y_2(0) + i(U_{11} + 1) \cdot Y_1(0) = 0,$$
$$(U_{22} - 1) \cdot [Y_2(1) + \omega_1 Y_1(1)] + i(U_{22} + 1) \cdot Y_1(1) = 0.$$

Аналогично, выполнение соотношения $y \in \ker S_{T(\lambda)}(x)$ равносильно существованию вектор-функции $Y \in W_2^1[0,x] \times W_1^1[0,x]$, удовлетворяющей тождеству

$$(\forall t \in [0,x]) \qquad Y_1(t) = y(t/x)$$

и являющейся решением граничной задачи, отвечающей дифференциальному уравнению (1) и граничным условиям

$$(U_{11} - 1) \cdot Y_2(0) + i(U_{11} + 1) \cdot Y_1(0) = 0,$$
$$Y_1(x) = 0.$$

Из теоремы единственности [**ЛДО**, § 16, Теорема 1] теперь немедленно вытекает справедливость следующих трёх утверждений:

3.1. *Пусть λ — произвольное вещественное число. Тогда все точки, сопряжённые точке* 0 *относительно оператора $T(\lambda)$, являются изолированными и имеют кратность* 1.

3.2. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное значение пучка T. Тогда его геометрическая кратность равна* 1. *При этом точка* 1 *является сопряжённой точке* 0 *относительно оператора $T(\lambda)$ в том и только том случае, когда выполняется равенство $U_{22} = 1$.*

3.3. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное значение пучка T, а $y \in \mathfrak{H}_U$ — отвечающая ему вещественная собственная функция. Тогда множество точек, сопряжённых точке* 0 *относительно оператора $T(\lambda)$, совпадает с множеством принадлежащих полуинтервалу* $(0,1]$ *нулей функции y. При этом в каждом из таких нулей функция y меняет знак.*

4. Обозначим теперь через P, Q и R действующие в пространстве $\mathfrak{H}_U$ эрмитовы операторы вида

$$(1)\qquad (\forall y \in \mathfrak{H}_U) \qquad \langle Py, y\rangle_{\mathfrak{H}_U} = \int_0^1 \{p\,|y'|^2 + |y|^2\}\,dx,$$

$$(2)\qquad (\forall y \in \mathfrak{H}_U) \qquad \langle Qy, y\rangle_{\mathfrak{H}_U} = \int_0^1 (q-1)\cdot|y|^2\,dx + \langle Vy^\wedge, y^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2},$$

$$(3)\qquad (\forall y \in \mathfrak{H}_U) \qquad \langle Ry, y\rangle_{\mathfrak{H}_U} = \int_0^1 r\cdot|y|^2\,dx.$$

Легко видеть, что оператор P является равномерно положительным, а операторы Q и R — вполне непрерывными. Несложно также проверить, что при $x \searrow 0$ операторы ${J_x}^* P J_x$ имеют положительную нижнюю оценку порядка $O(1/x)$, а нормы операторов ${J_x}^* Q J_x$ и ${J_x}^* R J_x$ имеют верхнюю оценку порядка $O(1/\sqrt{x})$. Этим наблюдением устанавливается справедливость следующего утверждения:

4.1. *Пусть λ — произвольное вещественное число. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что при любом $x \in (0,\varepsilon)$ оператор $S_{T(\lambda)}(x)$ является положительным.*

Также имеет место следующий факт:

4.2. *Пусть λ — произвольное вещественное число. Тогда для любого полуинтервала $[a,b) \subseteq (0,1]$ число лежащих на этом полуинтервале точек, сопряжённых точке* 0 *относительно оператора $T(\lambda)$, равно величине* $\operatorname{ind} S_{T(\lambda)}(b) - \operatorname{ind} S_{T(\lambda)}(a)$.

Доказательство. Заметим, что операторы J_x и ${J_x}^*$ непрерывно зависят от параметра $x \in (0,1]$ в смысле сильной операторной топологии. Поэтому к оператор-функциям $A : (0,1] \to \mathfrak{E}(\mathfrak{H}_U^0)$ и $B : (0,1] \to \mathfrak{E}_c(\mathfrak{H}_U^0)$ вида

$$(\forall x \in (0,1]) \qquad A(x) = {J_x}^* P J_x,$$
$$(\forall x \in (0,1]) \qquad B(x) = {J_x}^* (Q - \lambda R) J_x$$

можно применять утверждение 1.1. В оставшейся части доказательства под $\Lambda_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ мы будем понимать непрерывные функции, отвечающие именно такому выбору оператор-функций A и B.

Как следует из известного факта равенства числа отрицательных собственных значений эрмитова оператора его индексу инерции (см., например, [**ЛФА**, п. 95]), при любом значении $x \in (0,1]$ выполняется равенство

$$\operatorname{ind} S_{T(\lambda)}(x) = \#\{n \geqslant 1 \mid \Lambda_n(x) < 0\}.$$

Из утверждения 3.1 следует также, что каждой точке $x \in (0,1]$, сопряжённой точке 0 относительно оператора $T(\lambda)$, отвечает единственная функция Λ_n, удовлетворяющая равенству $\Lambda_n(x) = 0$. При этом, как несложно установить на основе стандартных рассуждений, лежащих в основе доказательства вариационного принципа Куранта (см., например, [**САДО**, Теорема 1.3]), каждая из функций Λ_n невозрастает (а тогда, в силу утверждения 3.1, и строго убывает) в своих нулях. Из этих фактов с очевидностью вытекает справедливость доказываемого утверждения. □

5. Итоги проведённых в настоящем параграфе исследований могут быть подведены в виде следующего утверждения:

5.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное значение пучка T, а $y \in \mathfrak{H}_U$ — отвечающая ему собственная функция. Тогда величина* $\operatorname{ind} I^+T(\lambda)$ *равна числу лежащих на интервале* $(0,1)$ *нулей функции* y.

Доказательство. Из утверждений 4.1 и 4.2 немедленно следует, что число лежащих на интервале $(0,1)$ нулей функции y совпадает с величиной $\operatorname{ind} S_{T(\lambda)}(1)$. В случае $U_{22} = 1$ это автоматически означает справедливость доказываемого утверждения.

Рассмотрим случай $U_{22} \neq 1$. Заметим, что может быть указано подпространство $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_U$ размерности $\operatorname{ind} I^+T(\lambda) + 1$, на котором квадратичная форма оператора $I^+T(\lambda)$ является неположительной. При этом квадратичная форма оператора $S_{T(\lambda)}(1)$ оказывается неположительной на подпространстве $\mathfrak{M}^0 \rightleftharpoons \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_U^0$, имеющем размерность не менее $\operatorname{ind} I^+T(\lambda)$. С другой стороны, из утверждения 3.2 следует, что неположительность квадратичной формы оператора $S_{T(\lambda)}(1)$ на подпространстве размерности $\operatorname{ind} I^+T(\lambda)$ возможна лишь в том случае, если оператор $1+[A(1)]^{-1/2}B(1)[A(1)]^{-1/2}$ из доказательства утверждения 4.2 имеет не менее $\operatorname{ind} I^+T(\lambda)$ отрицательных собственных значений. Однако тогда выполняется равенство $\operatorname{ind} S_{T(\lambda)}(1) = \operatorname{ind} I^+T(\lambda)$, с очевидностью означающее справедливость доказываемого утверждения. □

§ 3. Осцилляционные теоремы

1. Имеет место следующий факт:

1.1. *Пусть ξ — вещественное число, для которого оператор $I^+T(\xi)$ является положительным. Тогда спектр граничной задачи § 1.1* (1)*, § 1.1* (2) *представляет собой множество членов двух не имеющих конечных точек накопления (но, возможно, обрывающихся) последовательностей* $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *простых собственных значений*

$$\ldots < \lambda_{-n} < \ldots < \lambda_{-1} < \xi < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

При этом выполняется тождество

$$(\forall n \neq 0) \qquad \operatorname{ind} I^+T(\lambda_n) = |n| - 1.$$

Доказательство. Заметим, что произвольная точка $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит спектру пучка T в том и только том случае, когда точка $(\lambda - \xi)^{-1}$ принадлежит спектру вполне непрерывного оператора $[I^+T(\xi)]^{-1}R$. Здесь и далее через R обозначается оператор, определённый соотношением § 2.4 (3). Учитывая утверждение § 2.3.2 и очевидный факт подобия оператора $[I^+T(\xi)]^{-1}R$ эрмитову, убеждаемся в справедливости сделанных утверждений о структуре спектра пучка T.

Рассмотрим теперь оператор-функции $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{E}(\mathfrak{H}_U)$ и $B : \mathbb{R} \to \mathfrak{E}_c(\mathfrak{H}_U)$ вида

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \qquad A(\lambda) = P,$$

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \qquad B(\lambda) = (Q - \lambda R),$$

где P и Q — операторы, определённые соотношениями § 2.4 (1) и § 2.4 (2). Согласно утверждению § 2.1.1, отвечающие этим оператор-функциям числовые функции $\Lambda_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ являются непрерывными. При этом из положительности оператора $I^+T(\xi)$ и очевидного тождества

$$(\forall \lambda \neq \xi) \qquad \operatorname{ind} I^+T(\lambda) = \operatorname{ind}\bigl[|\lambda - \xi|^{-1} \cdot I^+T(\xi) - \operatorname{sign}(\lambda - \xi) \cdot R\bigr]$$

следует, что каждая из функций Λ_n неубывает в своих нулях, расположенных левее точки ξ, и невозрастает в своих нулях, расположенных правее точки ξ. Объединяя эти факты с ранее полученными, убеждаемся, что при любом $n \geqslant 1$ собственное значение λ_{-n} представляет собой расположенный левее точки ξ нуль функции Λ_n, а собственное значение λ_n представляет собой расположенный правее точки ξ нуль функции Λ_n. Тем самым, справедливость доказываемого утверждения установлена полностью. □

2. Из утверждений 1.1, § 2.5.1 и § 2.3.3 сразу же вытекает справедливость следующего утверждения:

2.1. *Пусть оператор $I^+T(\xi)$ положителен при некотором значении $\xi \in \mathbb{R}$, и пусть $y_n \in \mathfrak{H}_U$ — вещественная собственная функция задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2), отвечающая собственному значению λ_n, где $n \geqslant 1$. Тогда функция y_n имеет на интервале $(0,1)$ ровно $n-1$ нулей, в каждом из которых она меняет знак.*

Также имеет место следующий факт:

2.2. *Пусть оператор $I^+T(\xi)$ положителен при некотором значении $\xi \in \mathbb{R}$, и пусть $y_n \in \mathfrak{H}_U$ и $y_{n+1} \in \mathfrak{H}_U$ — две собственные функции задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2), отвечающие собственным значениям λ_n и λ_{n+1}, где $n \geqslant 2$, соответственно. Тогда между любыми двумя нулями функции y_n, а также между любым нулём функции y_n и каждой из точек 0 и 1, расположен по меньшей мере один нуль функции y_{n+1}.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число $n \geqslant 2$ и введём обозначение x_k для k-того слева нуля собственной функции y_n на интервале $(0,1)$. Из утверждений § 2.4.1 и § 2.4.2 следует существование k-мерного подпространства $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_U^0$, на котором квадратичная форма оператора $S_{T(\lambda_n)}(x_k)$ является неположительной. Тогда, ввиду положительности оператора $I^+T(\xi)$ и справедливости тождества

$$(\forall x \in (0,1]) \, (\forall \lambda \neq \xi) \qquad \operatorname{ind} S_{T(\lambda)}(x) = \operatorname{ind}\bigl[|\lambda - \xi|^{-1} \cdot S_{T(\xi)}(x) - \operatorname{sign}(\lambda - \xi) \cdot J_x{}^* R J_x\bigr],$$

квадратичная форма оператора $S_{T(\lambda_{n+1})}(x_k)$ должна быть отрицательна на подпространстве $\mathfrak{M}$. Последнее, согласно утверждениям § 2.4.1 и § 2.4.2, означает, что k-тый слева нуль собственной функции y_{n+1} должен лежать на интервале $(0, x_k)$.

Заметим теперь, что аналогично точкам, сопряжённым точке 0 относительно оператора $T(\lambda)$, могут быть рассмотрены точки, сопряжённые точке 1 относительно этого оператора. Повторяя для них проведённые только что рассуждения, можно убедиться, что k-тый справа нуль собственной функции y_{n+1} должен быть расположен правее k-того справа нуля собственной функции y_n. Объединяя полученные результаты, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения. □

Очевидно, что утверждения, полностью аналогичные утверждениям 2.1 и 2.2, могут быть сформулированы и для собственных функций, отвечающих собственным значениям с отрицательными индексами.

3. Рассмотрим теперь случай, когда весовая функция r является неотрицательной, а её носитель совпадает со всем отрезком $[0,1]$. Легко видеть, что такое предположение равносильно предположению о положительности определённого соотношением § 2.4 (3) оператора R.

Имеет место следующий простой факт:

3.1. *Пусть весовая функция r неотрицательна, а её носителем является весь отрезок $[0,1]$. Тогда найдётся такое вещественное число $\xi < 0$, что для любого значения $\lambda \leqslant \xi$ оператор $I^+T(\lambda)$ будет положительным.*

Доказательство. Пусть $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — сильно сходящаяся к единичному оператору последовательность ортопроекторов на конечномерные инвариантные подпространства оператора R. Ввиду полной непрерывности оператора Q, последовательность $\{\Pi_k Q \Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к оператору Q. Поэтому найдётся индекс $n \geqslant 1$, для которого оператор $P + Q - \Pi_n Q \Pi_n$ будет положительным. При этом, ввиду конечномерности образа оператора Π_n, найдётся вещественное число $\xi < 0$, для которого оператор $\Pi_n Q \Pi_n - \xi \Pi_n R \Pi_n$ будет неотрицательным. Отсюда немедленно вытекает справедливость доказываемого утверждения. $\square$

Утверждение 3.1 позволяет автоматически применять полученные ранее результаты о числе и расположении нулей собственных функций задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) к дефинитному случаю.

Список литературы

[САДО] Ф. С. Рофе–Бекетов, А. М. Холькин. *Спектральный анализ дифференциальных операторов.* — Мариуполь, 2001.

[ШЛПР] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов. *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*// Труды Моск. матем. общества. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.

[СПДО] А. А. Владимиров. *О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов*// Матем. заметки. — 2004. — Т. 75 (6). — С. 941–943.

[IOT] P. A. Binding, H. Volmer. *Oscillation theory for Sturm–Liouville problems with indefinite coefficients*// Proc. Roy. Soc. Edinburg. — 2001. — V. 131. — P. 989–1002.

[НРОТ] Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров. *О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля*// Матем. заметки. — 2007. — Т. 82 (4). — С. 578–582.

[ЛФА] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви–Надь. *Лекции по функциональному анализу.* — М.: Мир, 1979.

[ЛДО] М. А. Наймарк. *Линейные дифференциальные операторы.* — М.: Наука, 1969.